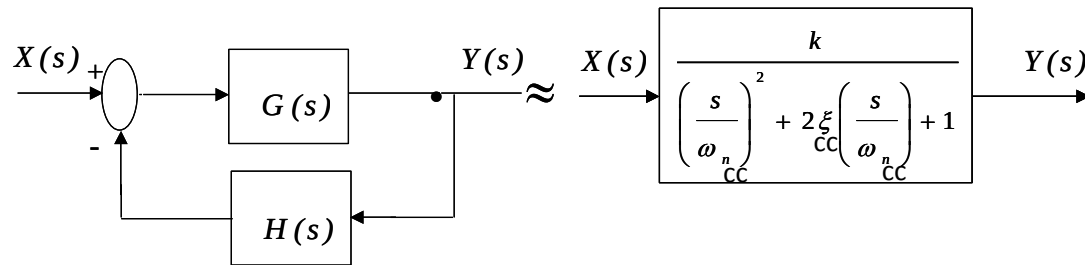


Capítulo 13: Análisis dinámico en el dominio de la frecuencia

carlos.platero@upm.es (C-305)

Análisis temporal y frecuencial de la cadena cerrada

- ▶ Inferir la dinámica del sistema realimentado a partir de la información de la cadena abierta
 - ▶ Respuesta en frecuencias de la cadena cerrada
 - ▶ Respuesta temporal al escalón de la cadena cerrada
- ▶ Relación entre la respuesta en frecuencias y el régimen transitorio
 - ▶ Equivalente reducido



$$\xi_{cc} \cong \frac{\gamma}{100} \quad \text{Si} \quad 0 \leq \xi_{cc} < 0.707$$

$$\omega_g \leq \omega_{r,cc} \leq \omega_f \quad \text{Si} \quad 0 \leq \xi_{cc} < 0.707 \quad M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} \quad \text{Si} \quad 0 \leq \xi < 0.707$$

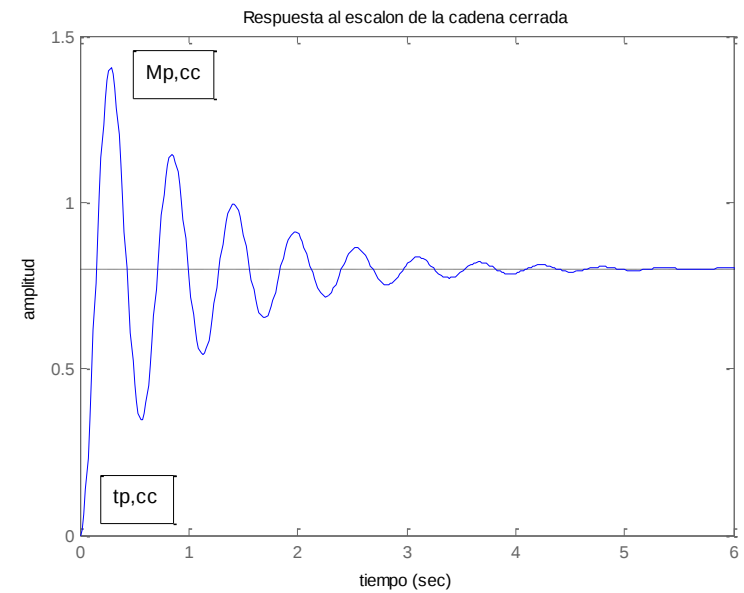
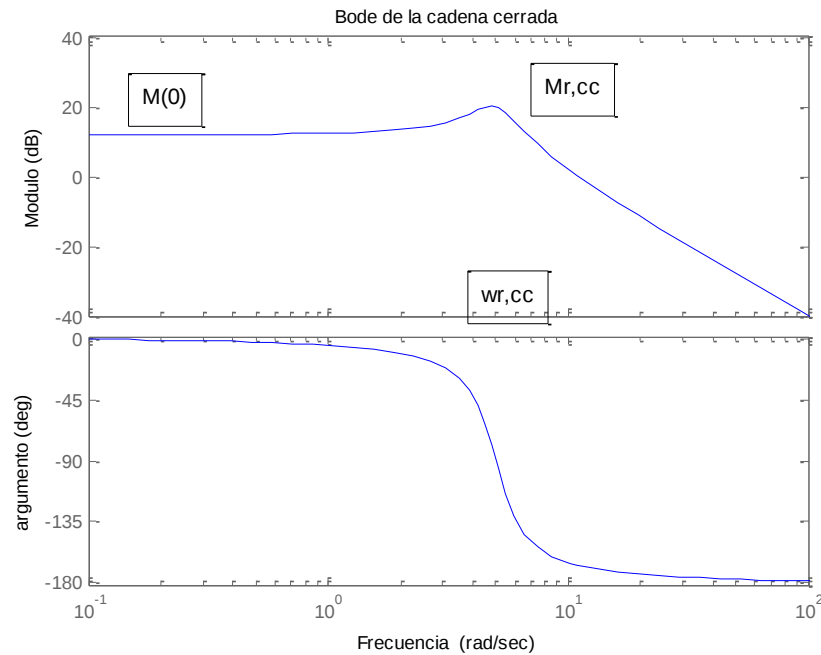
Compromiso entre estabilidad y respuesta temporal

- ▶ Relación entre el margen de fase y la sobre-oscilación al escalón:
 - ▶ $40^\circ < \gamma < 70^\circ \leftrightarrow 0.4 < \xi_{cc} < 0.7 \rightarrow 12\% < M_{p,cc} < 30\%.$
- ▶ Otras relaciones

$$\omega_{r,cc} \cong \omega_{d,cc} \cong \omega_{n,cc} \cong \omega_{c,cc} \quad 0 \leq \xi < 0.707$$

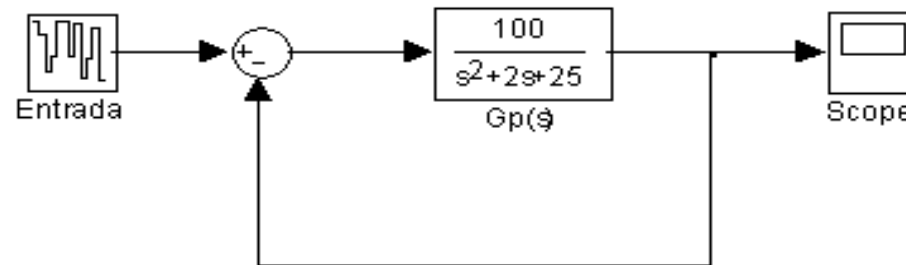
$$AB_{cc} = \frac{1}{2t_{r,cc}} \quad 10\% < M_{p,cc} < 25\%$$

Respuesta en frecuencia y respuesta al escalón de la cadena cerrada



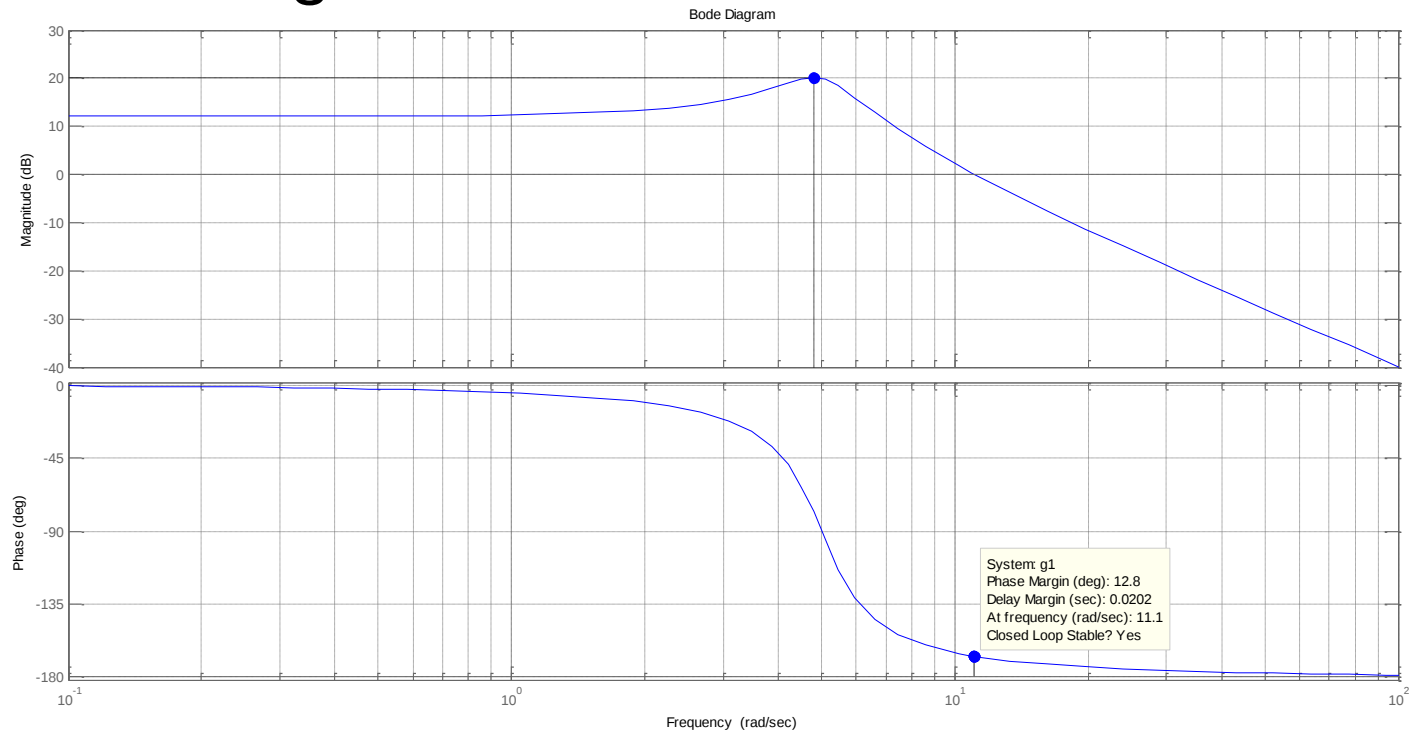
Ejemplo 13.1

Determinar la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada a partir de la información de la cadena abierta del siguiente sistema de control:



Ejemplo 13.1

- ▶ El polo tiene: $\omega_n=5$ $\xi=0.2$
- ▶ Se calcula las frecuencias de cruce de ganancia y fase junto con el margen de fase



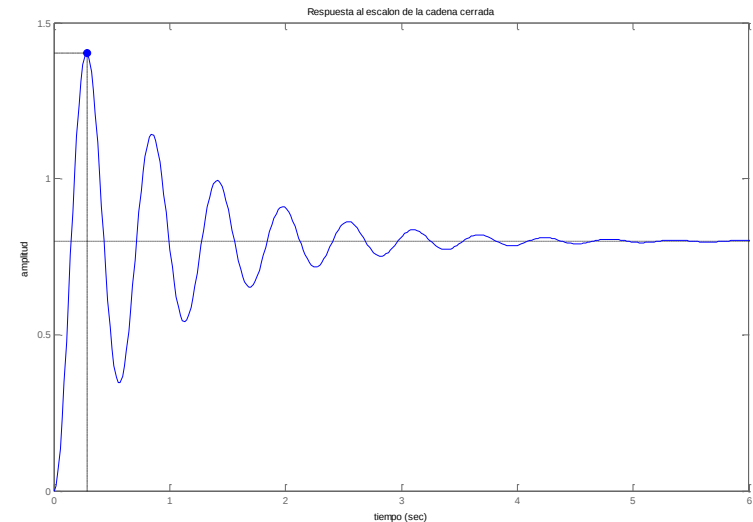
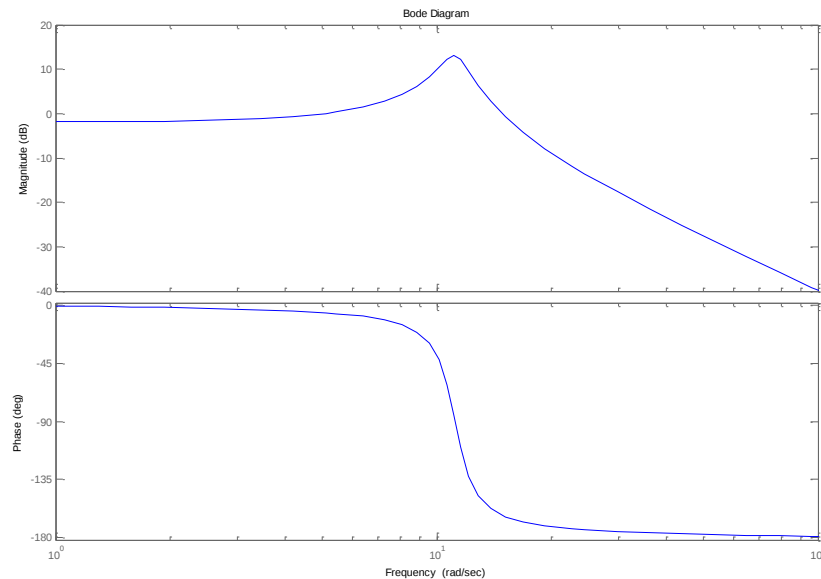
- ▶ $\omega_g=11$ $\gamma=13^\circ$

Ejemplo 13.1

► Aproximadamente:

$$M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} = 3.9 \diamond 11 \text{ dB} \quad \omega_{r,cc} \sim 11 \text{ [rad/s]}$$

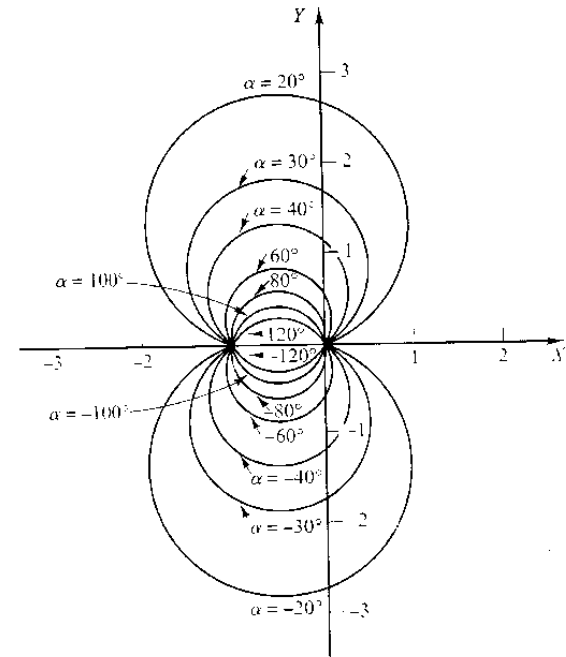
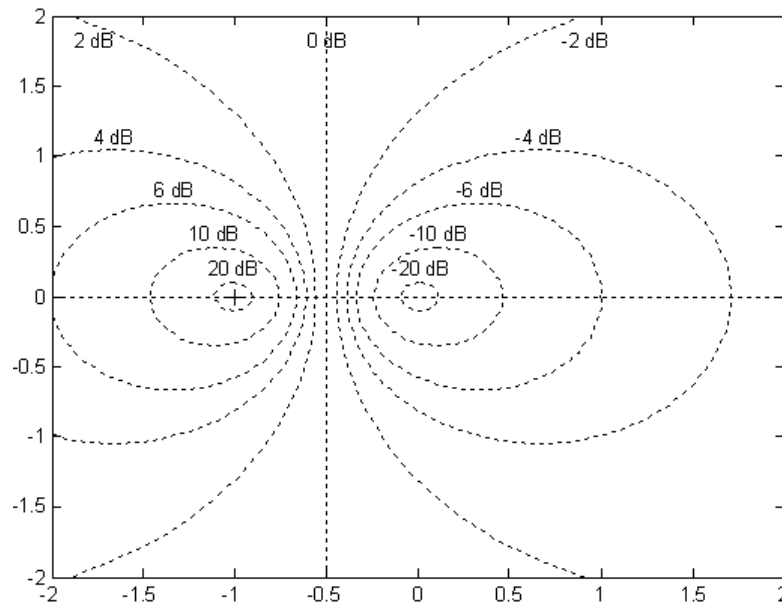
$$e_p = \frac{1}{1 + k_p} = \frac{1}{5} \rightarrow \text{Luego la ganancia estática es 0.8}$$



$$\xi_{cc} = 0.128 \rightarrow \vartheta_{cc} = 82.64^\circ \rightarrow M_{p,cc} = 66.67\% \quad t_{p,cc} \cong \frac{\pi}{\omega_{r,cc}} = 0.28 \text{ s}$$

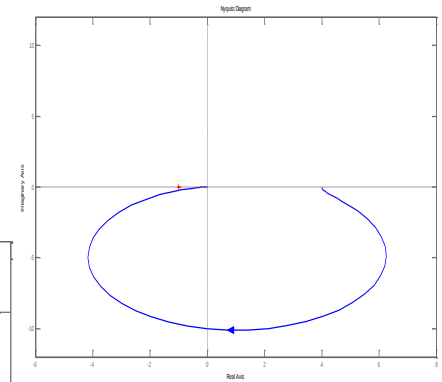
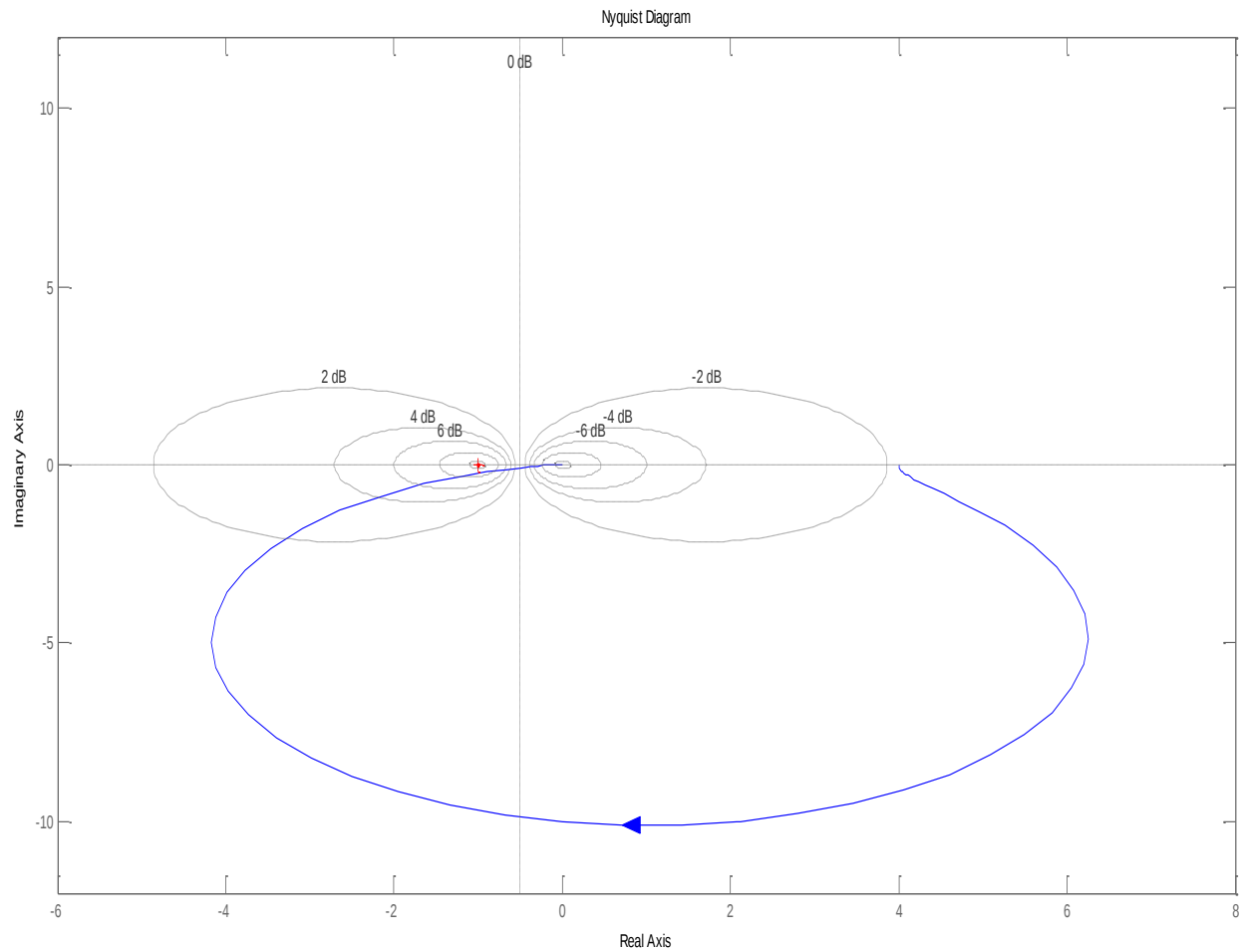
Respuesta en frecuencia de la cadena cerrada

- ▶ Parámetros: $M_{r,cc}$, $\omega_{r,cc}$ y AB_{cc}
- ▶ Procedimientos gráficos para obtener la respuesta en frecuencia de la cadena cerrada a partir de la cadena abierta
 - ▶ Círculos M y N (intersección de la curva polar)



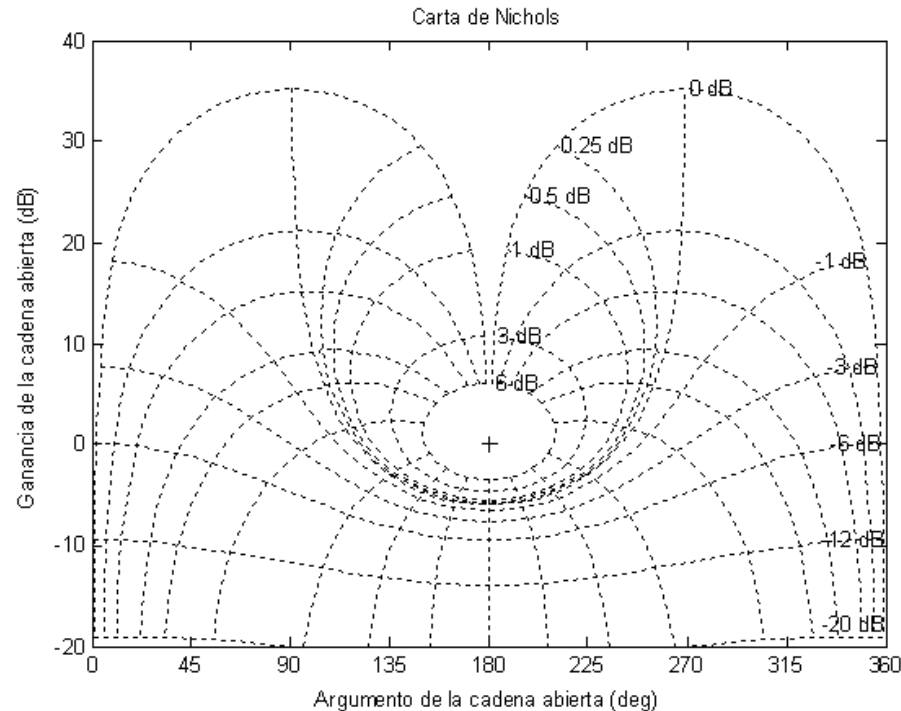
Ejemplo 13.1

► Círculos M



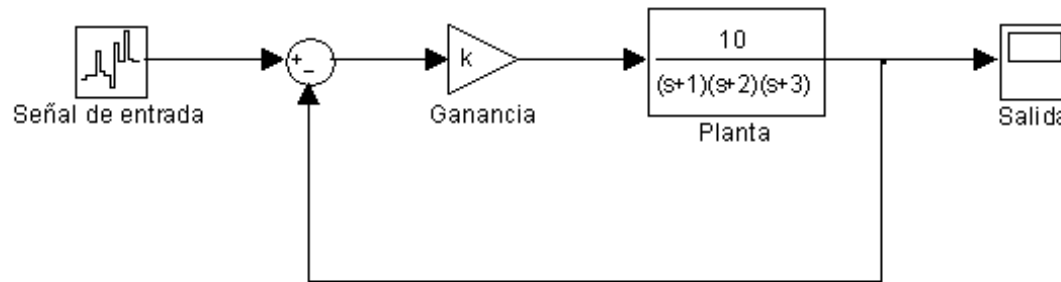
Carta de Nichols

- ▶ Inconveniente de la representación polar al varia k .
- ▶ Ábaco de Hall o módulo-argumento
 - ▶ Apoyarse en el diagrama de Bode
- ▶ Trasladar M y N al ábaco: carta de Nichols



Ejemplo 13.2

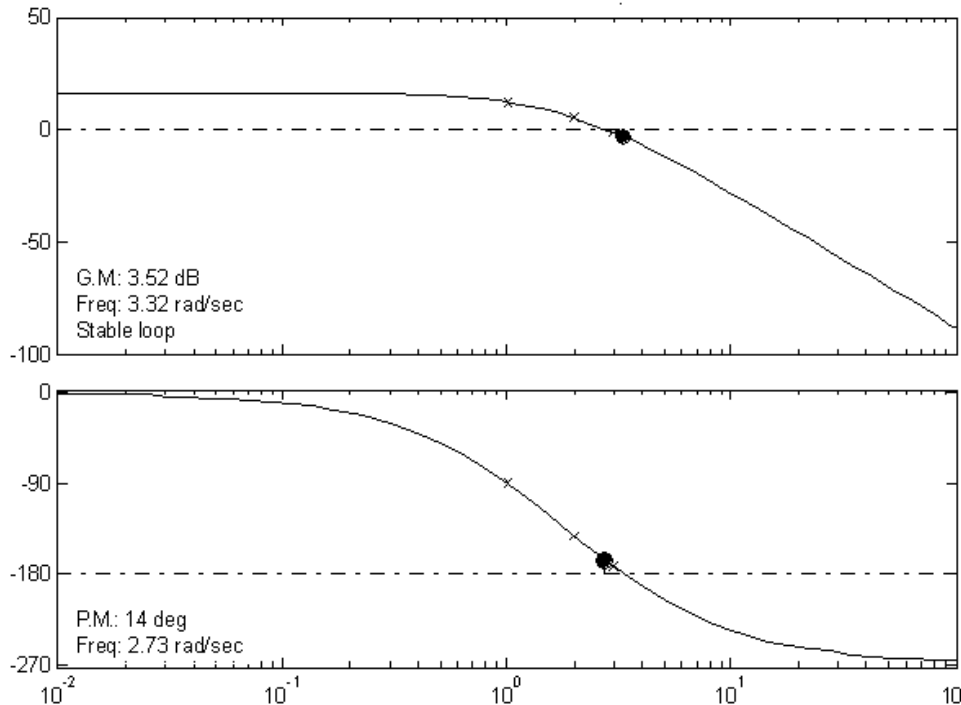
Si el valor de la ganancia es cuatro, $k = 4$, determinar si hay pico de resonancia en la cadena cerrada y cuánto vale y cuál es la frecuencia de resonancia utilizando la información de la cadena abierta. Averiguar el ancho de banda del sistema. Comparar los resultados con el equivalente reducido de la cadena cerrada y representar su diagrama de Bode.



Ejemplo 13.2

- Se calcula el margen de fase y ganancia con la información de la cadena abierta.

$$G_p(s) = \frac{40}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow G_p(j\omega) = \frac{40 / 6}{(1+j\omega)(1+0.5j\omega)(1+j\omega 0.33)}$$



$$M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} = 3.5 \diamond 11 \text{ dB}$$

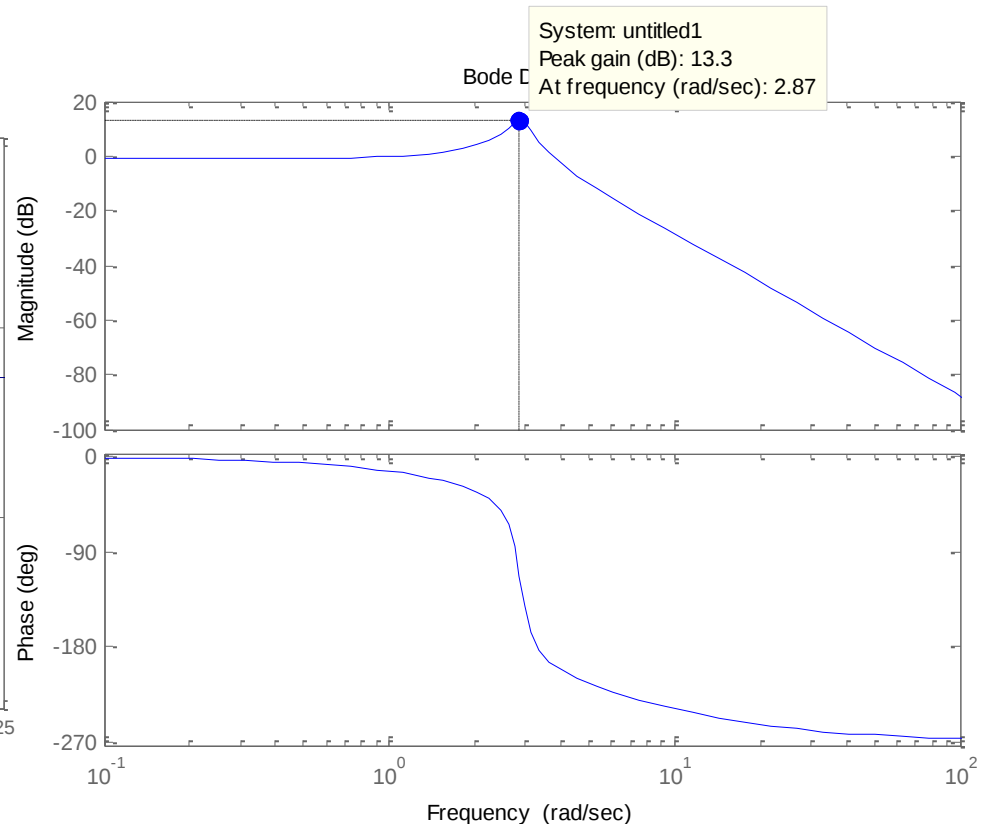
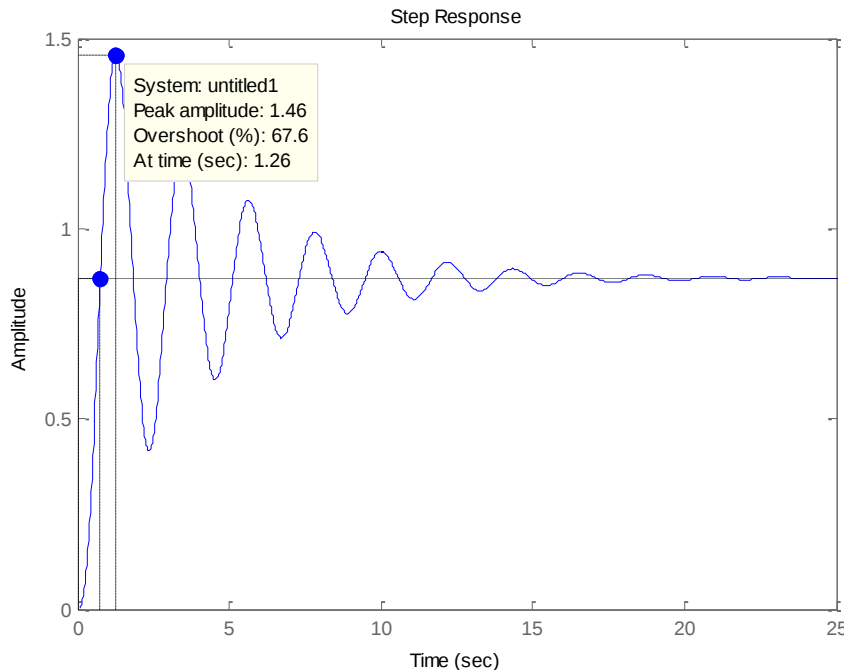
$$2.73 < \omega_{r,cc} < 3.32 \text{ [rad/s]}$$

Ejemplo 13.2

- Aproximaciones de la respuesta temporal y la respuesta frecuencial en la cadena cerrada

$$M_{r,cc} \cong \frac{1}{2\xi_{cc}} = 3.5 \diamond 11 \text{ dB} \quad e_p = 14.63 \% \quad M_{p,cc} = 64.13 \% \quad t_{p,cc} \cong 1 \text{ s}$$

$$2.73 < \omega_{r,cc} < 3.32 \text{ [rad/s]}$$



Ejemplo 13.2

- ▶ Empleando equivalente reducido.
 - ▶ Los polos son -5.5 y $-0.24 \pm j2.9$

$$M(s) = \frac{40}{s^3 + 6s^2 + 11s + 46} = \frac{40}{(s + 5.5)(s^2 + 0.48s + 8.33)}$$

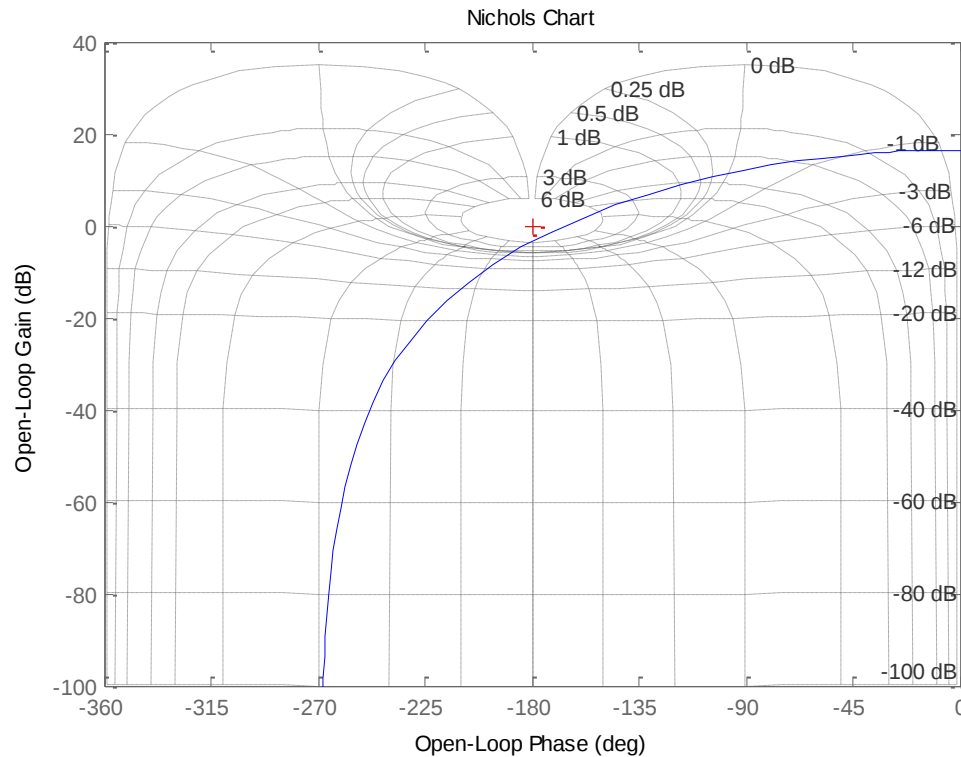
$$M_{eq} = \frac{7.27}{s^2 + 0.48s + 8.33} = \frac{0.87}{\left(\frac{s}{2.89}\right)^2 + 0.16 \frac{s}{2.89} + 1}$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{0.16} = 6 \diamond 15 \text{ dB}$$

$$\omega_r \approx \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cong 2.89 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Ejemplo 13.2

► Utilizando las cartas de Nichols



```
>> g1=tf(40,poly([-1 -2 -3]));  
>> step(feedback(g1,1));  
>> bode(feedback(g1,1));  
>> nichols(g1)
```

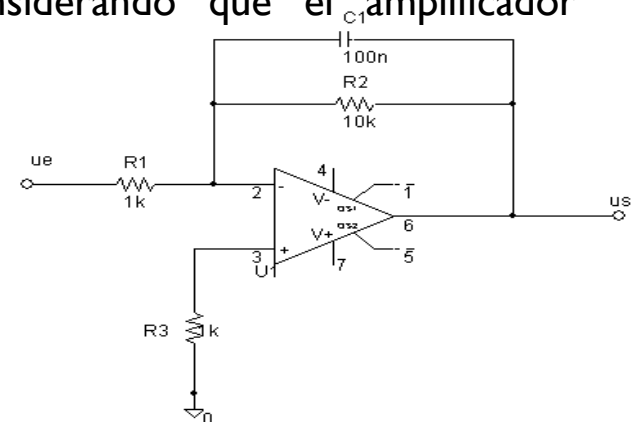
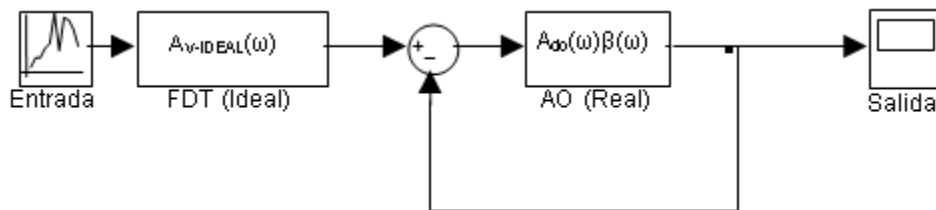
Problema 13.2

1. FDT de la ganancia de tensión del montaje considerando AO ideal.
2. Diagrama de Bode y curva polar de la respuesta en frecuencia del circuito.
3. Considerando el amplificador operacional real, el modelo del conjunto queda representado en el diagrama a bloques adjunto. La respuesta del sistema es la ganancia de tensión del circuito, calculada en el apartado 1, en cascada con la estructura de realimentación entre la ganancia de tensión en cadena abierta, A_{do} , con la red de realimentación, β . El amplificador operacional en cadena abierta tiene una ganancia estática de tensión de 10^4 y dos polos uno a 100 [rad/s] y el otro a 10^6 [rad/s]. La FDT de la red de realimentación vale:

$$\beta(\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{(1 + j\omega R_2 C_1)}{(1 + j\omega(R_2 \parallel R_1)C_1)}$$

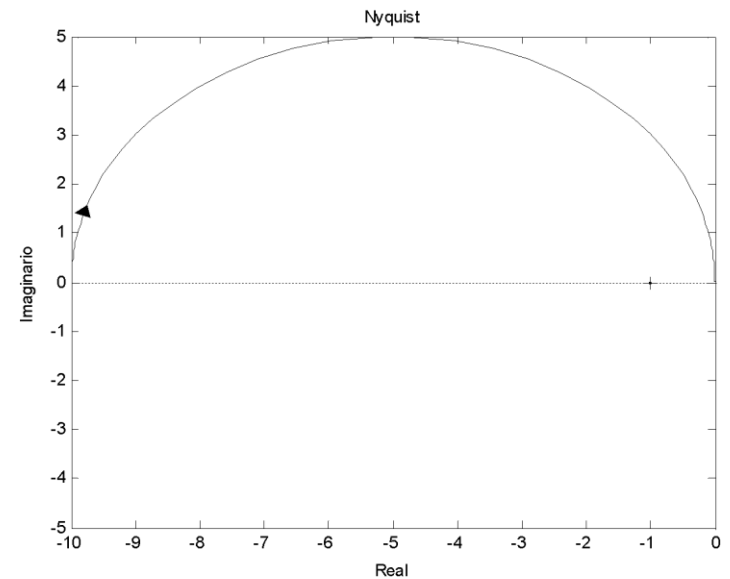
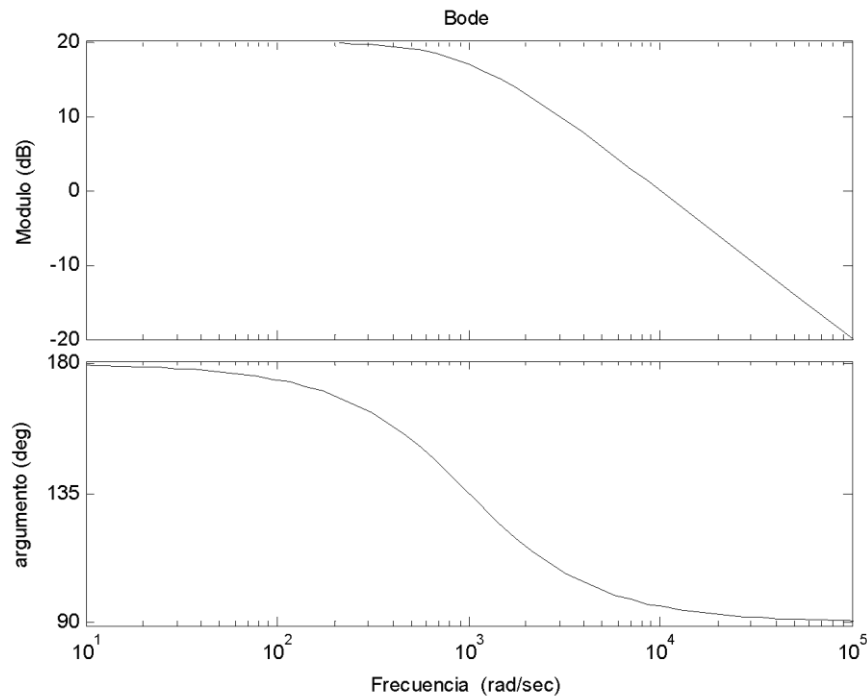
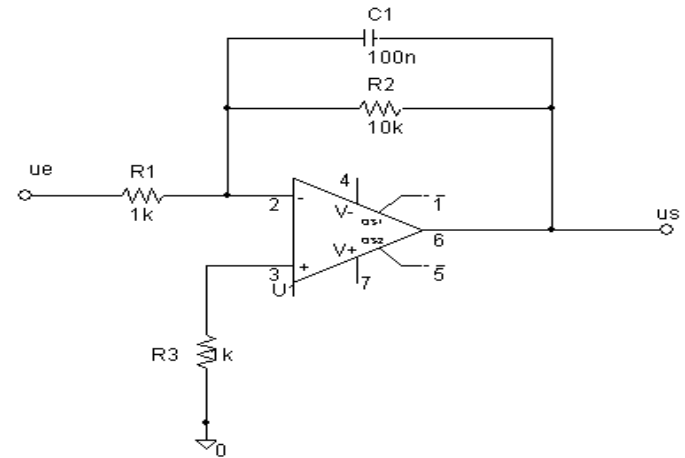
Determinar aproximadamente la frecuencia de cruce de ganancia, el margen de fase, la frecuencia de cruce de fase y el margen de tensión del equipo

4. Respuesta aproximada en frecuencias del circuito considerando que el amplificador operacional es real.



Problema 13.2

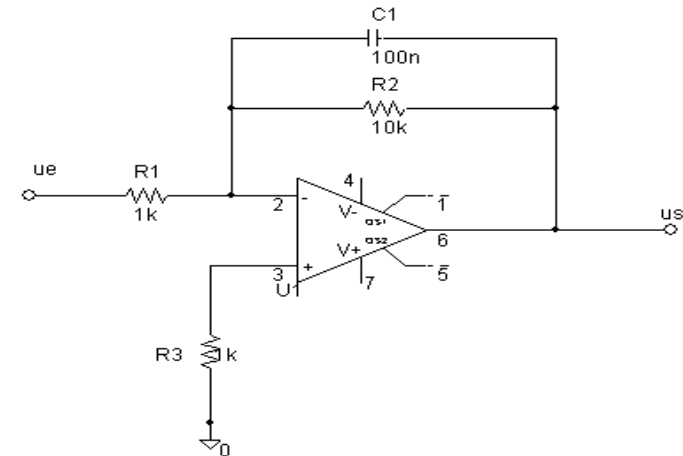
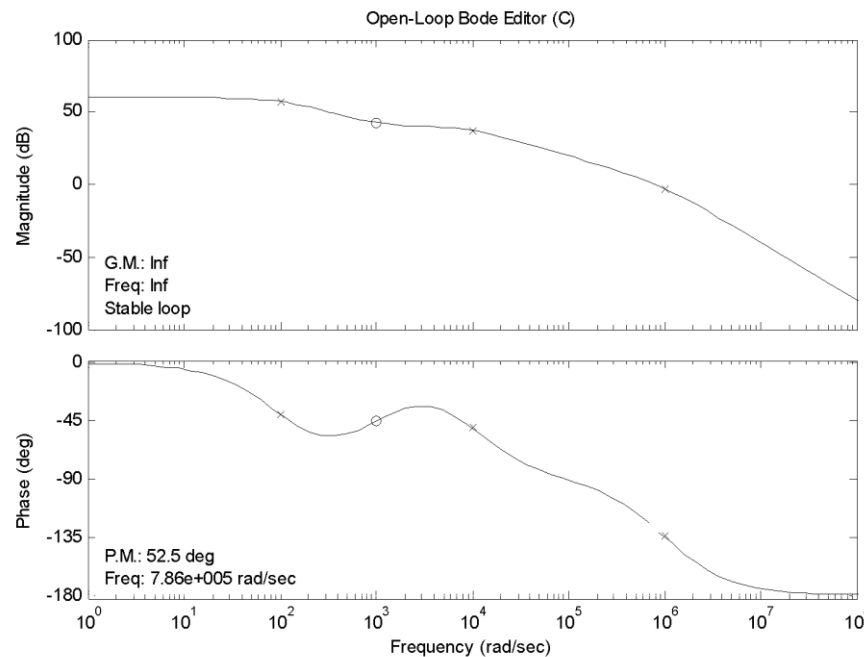
$$A_V(\omega) = \frac{-10}{1 + j\omega 10^{-3}}$$



Problema 13.2

- La estabilidad depende del bucle cerrado de control

$$A_{do}(\omega)\beta(\omega) \approx \frac{10^3(1 + j\omega 10^{-3})}{(1 + j\omega 10^{-2})(1 + j\omega 10^{-4})(1 + j\omega 10^{-6})}$$



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A_{do}(\omega)\beta(\omega)}{1 + A_{do}(\omega)\beta(\omega)} \cong 1 \quad \omega_{r,cc} \approx \omega_g = 8 \cdot 10^5 \quad \xi_{cc} \cong 0.5$$

Problema 13.2

